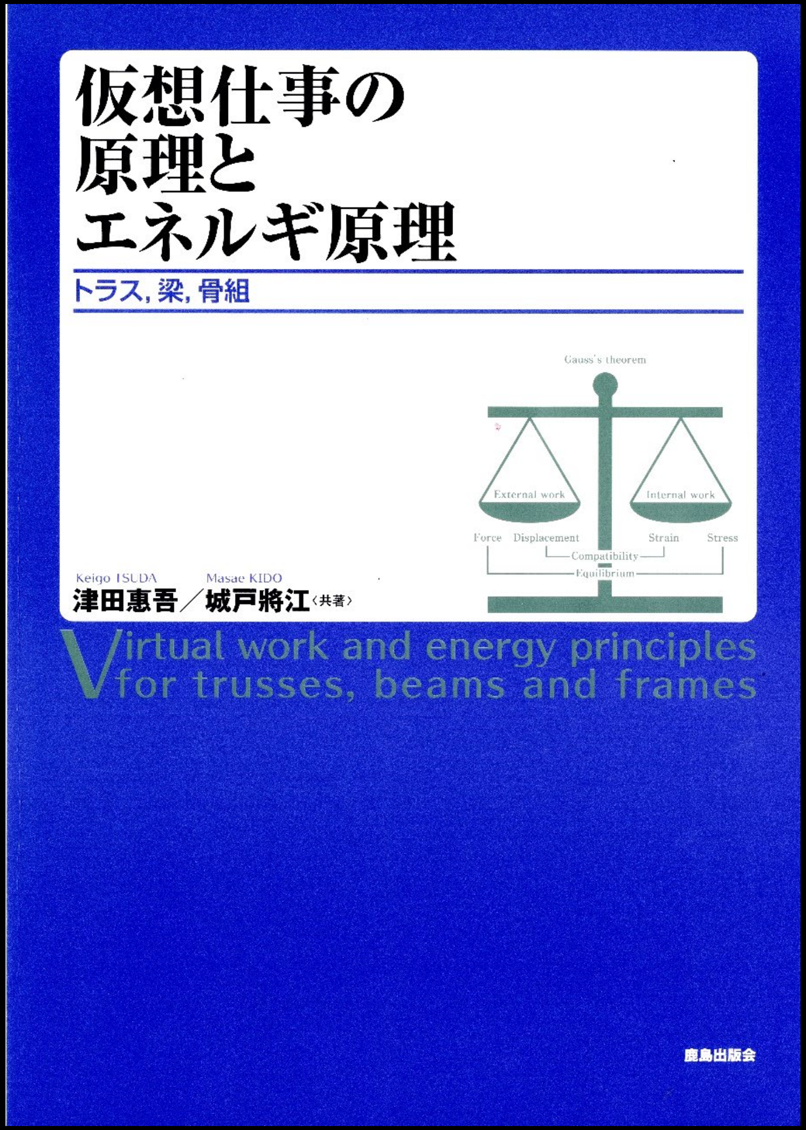
仮想仕事の原理

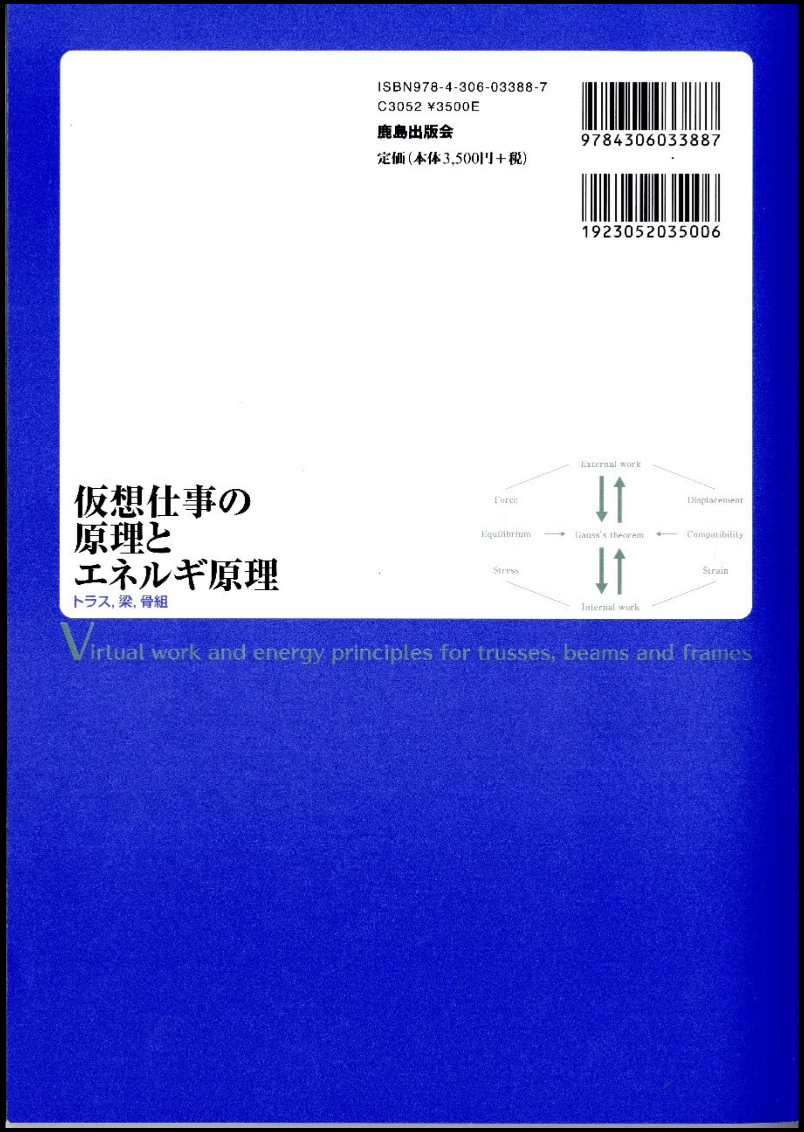
⑦ 相反定理

城戸將江・津田惠吾 2021.04

仮想仕事の原理とエネルギ原理 トラス，梁，骨組

鹿島出版会 2019年9月





仕事の原理・エネルギ原理の概観

カスティリアーノ第1定理

最小ポテンシャルエネルギの原理

⑨, ⑩

仮想仕事の原理

③, ④

⑤, ⑥

単位仮想変位法

ダイバージェンスの定理

単位仮想荷重法

線形の
断面力ーひずみ関係

⑦, ⑧ 相反定理

①, ②

構造力学の"構造"

補仮想仕事の原理

最小コンプリメンタリエネルギの原理

カスティリアーノの第2定理

概要1

2つの系：系1（釣合系1，適合系1）
系2（釣合系2，適合系2）

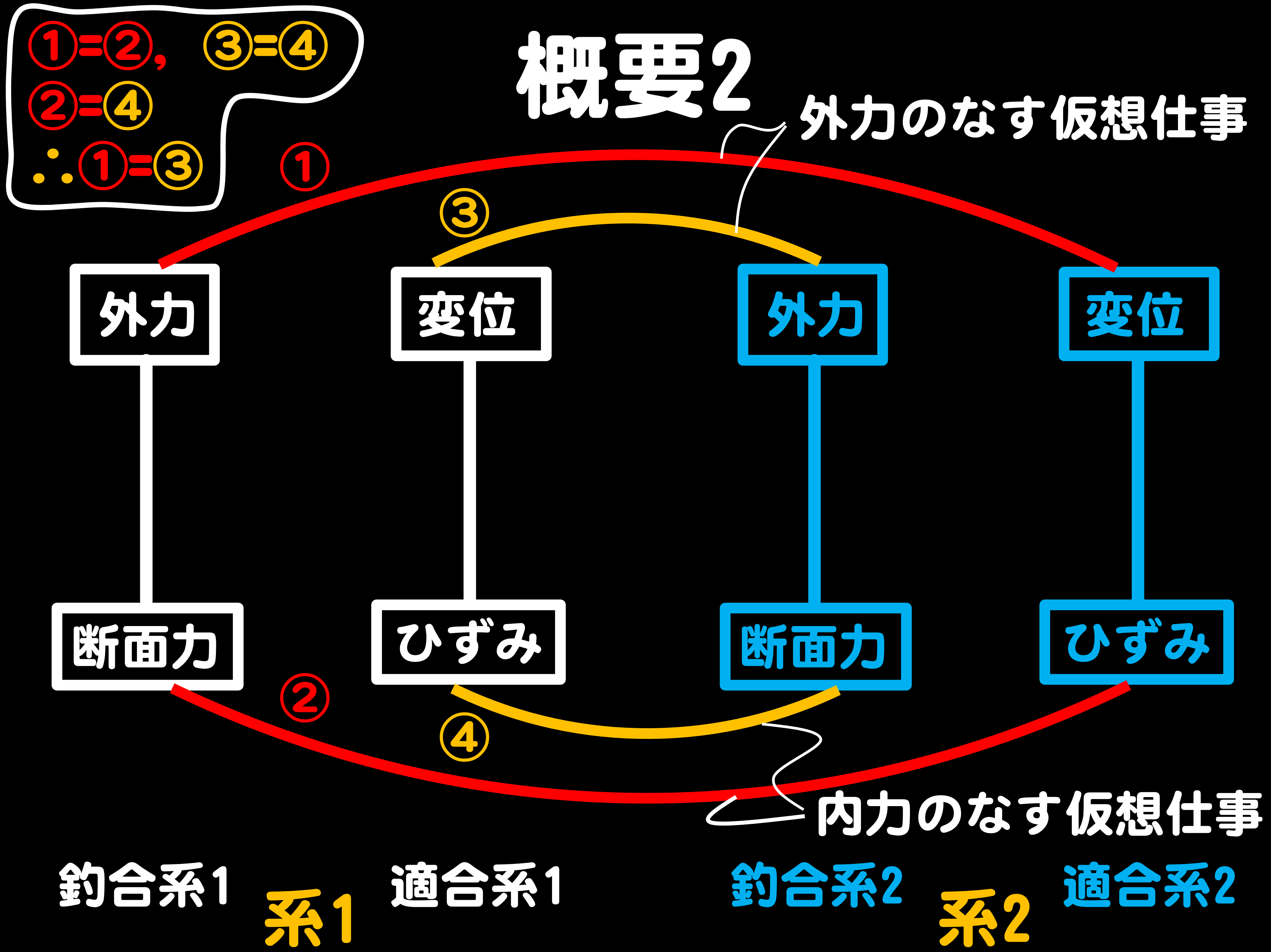
1）釣合系1と適合系2の
外力仕事1＝内力仕事1

2）釣合系2と適合系1の
外力仕事2＝内力仕事2

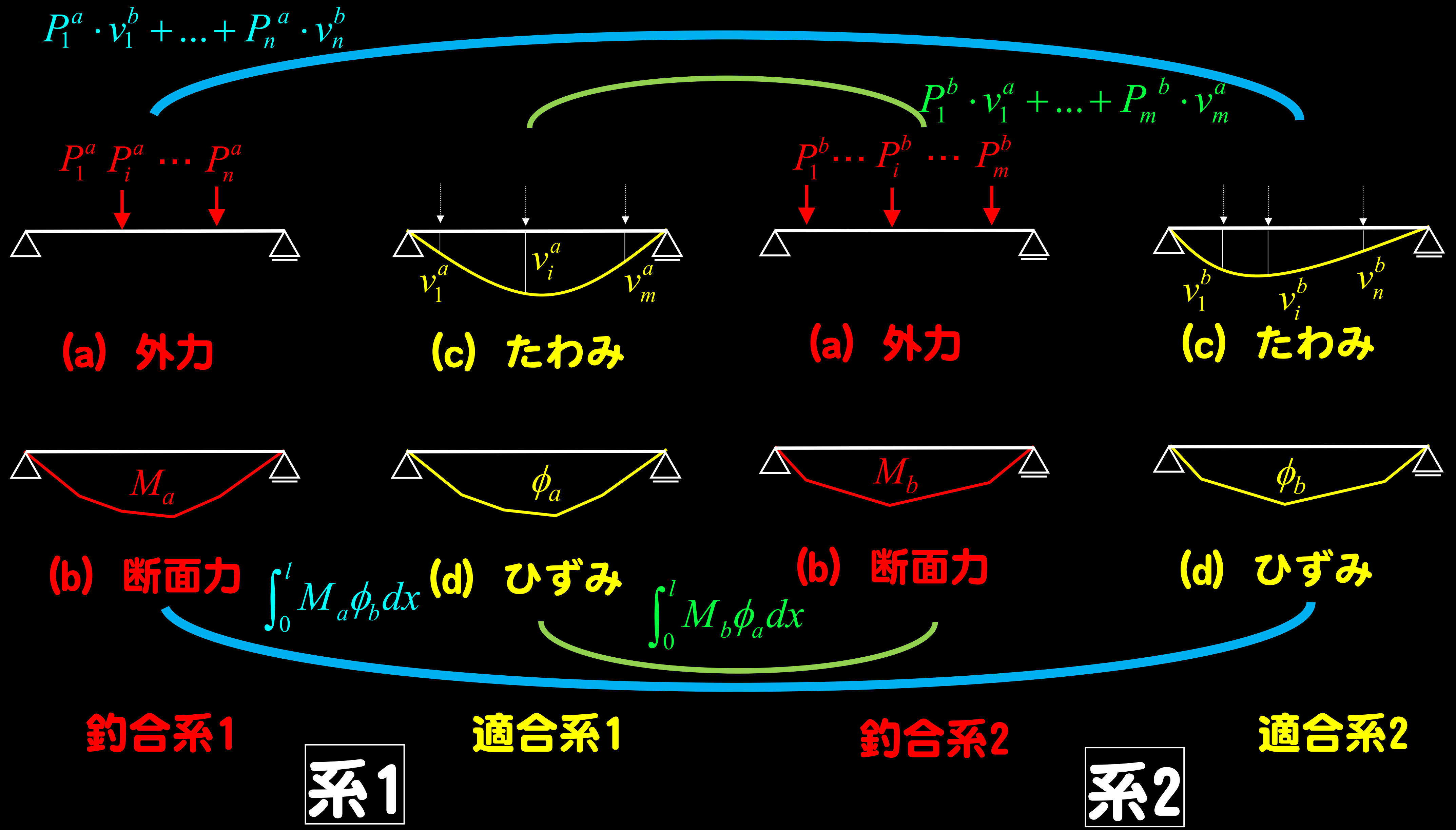
3）線形弾性体→ 内力仕事1＝内力仕事2

4）∴外力仕事1＝外力仕事2 → 相反定理

概要2


①=②， ③=④
②=④
∴①=③
外力のなす仮想仕事
①
③
外力
変位
外力
変位
断面力
ひずみ
断面力
ひずみ
②
④
内力のなす仮想仕事
釣合系1
系1
適合系1
釣合系2
系2
適合系2

相反定理の証明 1



$P_1^a \cdot v_1^b + \ldots + P_n^a \cdot v_n^b$
$P_1^b \cdot v_1^a + \ldots + P_m^b \cdot v_m^a$
P_1^a P_i^a … P_n^a
v_1^a v_i^a v_m^a
P_1^b … P_i^b … P_m^b
v_1^b v_i^b v_n^b
(a) 外力
(c) たわみ
(a) 外力
(c) たわみ
M_a
ϕ_a
M_b
ϕ_b
(b) 断面力
$\int_0^l M_a \phi_b dx$
(d) ひずみ
$\int_0^l M_b \phi_a dx$
(b) 断面力
(d) ひずみ
釣合系1
適合系1
釣合系2
適合系2
系1
系2

相反定理の証明 2

釣合系1の外力・断面力が適合系2の変位・ひずみに対してなす仮想仕事

$$P_1^a \cdot v_1^b + \ldots + P_n^a \cdot v_n^b = \int_0^l M_a \phi_b dx$$

釣合系2の外力・断面力が適合系1の変位・ひずみに対してなす仮想仕事

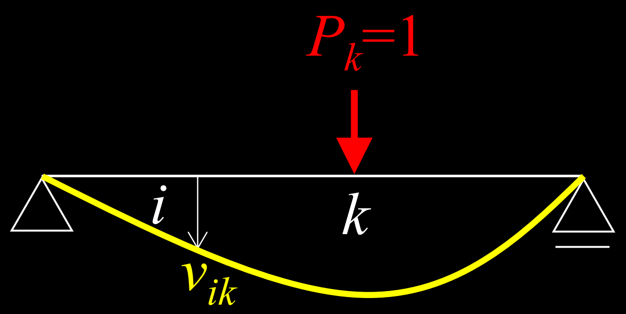
$$P_1^b \cdot v_1^a + \ldots + P_m^b \cdot v_m^a = \int_0^l M_b \phi_a dx$$

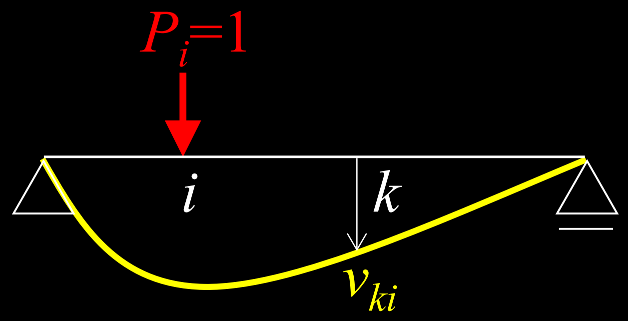
線形弾性体であれば， $\int_0^l M_a \phi_b dx = \int_0^l M_a \frac{M_b}{EI} dx = \int_0^l M_b \frac{M_a}{EI} dx = \int_0^l M_b \phi_a dx$

したがって，下式の相反定理が得られる

$$\boxed{P_1^a \cdot v_1^b + \ldots + P_n^a \cdot v_n^b = P_1^b \cdot v_1^a + \ldots + P_m^b \cdot v_m^a}$$

マックスウェルの定理





相反定理より

$$P_k \cdot v_{ki} = P_i \cdot v_{ik}$$

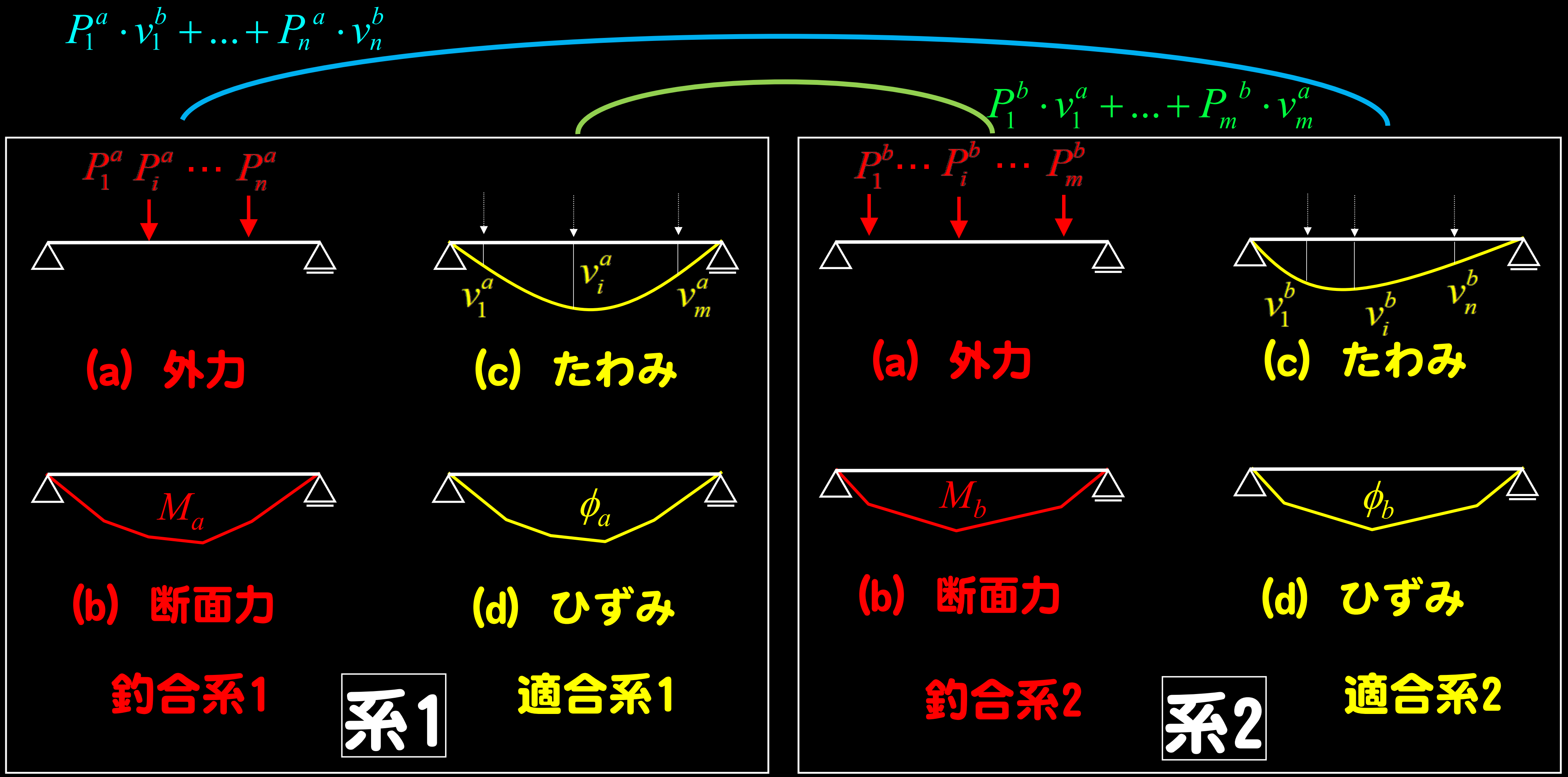
$P_k = P_i = 1$ とすると

下式の**マックスウェルの定理**が得られる

$$v_{ki} = v_{ik}$$

点iに作用する単位荷重による点kの変位

まとめ 1



$$\boxed{P_1^a \cdot v_1^b + \ldots + P_n^a \cdot v_n^b = P_1^b \cdot v_1^a + \ldots + P_m^b \cdot v_m^a}$$

まとめ 2

1) 線形弾性体で成り立つ

2) 釣合系と適合系の幾何学的境界条件は異なっても良い
釣合系の反力が適合系の変位に対して仕事をするときは忘れずに考慮することが重要

次の解説について

相反定理を用いた例題を

⑧ 相反定理 例題

で解説します．

質問・要望・意見

よりわかりやすく，役に立つ内容にしたいと考えています．

質問，要望，意見などを，どうぞ宜しくお願い致します．

質問等の送付先は，ホームページに示しています．

2021年4月版